Као што знамо, коначнодимензиони еуклидски простор $\mathbf{R}^k$ је векторски простор у коме се норма, па самим тим и метрика, уводи помоћу скаларног производа (в. пример 1.1.1). Тај скаларни производ има одређена својства која могу да послуже као инспирација за аксиоматско увођење одговарајуће операције у произвољном векторском простору. У овој књизи задржаћемо се само на случају реалног векторског простора.

Дефиниција 9.1.1

Нека је X реалан векторски простор. За функцију која сваком пару (x, y) елемената из X додељује реалан број $x \cdot y$ кажемо да је **скаларни производ** на X ако за све x, y, $z \in X$ и $\lambda \in \mathbf{R}$ важи:

1° $x \cdot y = y \cdot x$;

2° $\lambda x \cdot y = \lambda(x \cdot y)$;

3° $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$;

4° $x \cdot x \geqslant 0$;

5° $x \cdot x = 0$ ако и само ако је $x = 0$.

---

[1] J. B. J. Fourier (1768–1830), француски математичар

За доказ ... нпр. [1].

3° Подсетимо се да за функцију $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ кажемо да је део-по-део непрекидна ако постоји коначно много тачака $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ сегмента $[a,b]$, тако да је f непрекидна на сваком од интервала (x_{i-1}, x_i), $i = 1, \ldots, n$, а у крајевима тих интервала има десне, односно леве лимесе (тј. има највише коначно много тачака прекида и оне су прве врсте). Означимо са $C_0[a,b]$ векторски простор свих део-по-део непрекидних функција $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ које имају и особину да у свакој тачки x задовољавају једнакост

$$f(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

Операције векторског простора дефинишу се на стандардан начин. У тај простор уведимо скаларни производ помоћу

$$f \cdot g = \int_a^b f(x) g(x)\, dx, \quad \text{за } f,\, g \in C_0[a,b]. \tag{3}$$

Особине 1°–4° из дефиниције 9.1.1 се лако проверавају. Да бисмо доказали особину 5° скаларног производа, претпоставимо да је функција $f \in C_0[a,b]$ таква да је $f \cdot f = \int_a^b f^2(x)\, dx = 0$. Нека су $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ тачке прекида функције f. Тада је и $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f^2(x)\, dx = 0$ за $i = 1, \ldots, n$. Посматрајмо функцију $f_i\colon [x_{i-1}, x_i] \to \mathbf{R}$ дату са

$$f_i(x) = \begin{cases} f(x), & \text{за } x \in (x_{i-1}, x_i), \\ f(x_{i-1}+0), & \text{за } x = x_{i-1}, \\ f(x_i - 0), & \text{за } x = x_i. \end{cases}$$

Та функција је непрекидна и важи $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f_i^2(x)\, dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f^2(x)\, dx = 0$, па је $f_i(x) \equiv 0$ за $x \in [x_{i-1}, x_i]$. Значи, важи и $f(x_{i-1}+0) = f(x_i - 0) = 0$ за свако $i = 1, \ldots, n$. Из услова $f \in C_0[a,b]$ онда следи да је $f(x) = 0$ за $x \in [a,b]$.

Може се показати да пред-Хилбертов простор $C_0[a,b]$ није комплетан.

Примери 9.2.1

1° У простору $\mathbf{R}^k$ вектори $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_k = (0, 0, \ldots, 1)$ чине један ортонормиран систем.

2° Уочимо векторе

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots), \quad e_2 = (0, 1, 0, \ldots), \quad e_3 = (0, 0, 1, \ldots), \quad \ldots$$

Хилбертовог простора l^2. Непосредно се проверава да је низ вектора $\{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$ ортонормиран.

3° У простору $C_0[-\pi, \pi]$ део-по-део непрекидних функција на сегменту $[-\pi, \pi]$ посматрајмо **тригонометријски систем функција**

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots . \tag{1}$$

Ортонормираност тог низа функција следи из једнакости:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0, & \text{за } m \neq n, \\ \pi, & \text{за } m = n \neq 0, \\ 2\pi, & \text{за } m = n = 0, \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx = 0, \quad \text{за } m \in \mathbf{N} \cup \{0\},\ n \in \mathbf{N},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \begin{cases} 0, & \text{за } m \neq n, \\ \pi, & \text{за } m = n \neq 0, \end{cases}$$

које се непосредно проверавају.

4° На сличан начин се доказује да је у простору $C_0[-l, l]$ $(l > 0)$ ортонормиран следећи низ функција

$$\frac{1}{\sqrt{2l}}, \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{\pi x}{l}, \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{\pi x}{l}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{n\pi x}{l}, \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{n\pi x}{l}, \ldots .$$

koji nazivamo trigonometrijski red. Brojeve a_k i b_k nazivamo koeficijentima trigonomtrijskog reda (2), a sabirke $a_k \cos\frac{k\pi}{\ell}t + b_k \sin\frac{k\pi}{\ell}t$ - članovima reda.

Sada prethodno uopštimo. Neka je zadat trigonometrijski red

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi}{\ell}x + b_k \sin\frac{k\pi}{\ell}x\right). \tag{3}$$

Kako je $\left|\cos\frac{k\pi}{\ell}x\right| \leq 1$ i $\left|\sin\frac{k\pi}{\ell}x\right| \leq 1$, to je za konvergenciju (apsolutnu i ravnomjernu) reda (3) dovoljno da konvergira (majorantni) red

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(|a_k| + |b_k|\right).$$

Ovo slijedi na osnovu Vajerštrasovog kriterijuma o ravnomjernoj konvergenciji funkcionalnih redova. Kada se ustanovi da red (3) ravnomjerno konvergira, onda to znači da je njegova suma neprekidna funkcija sa periodom 2ℓ. Osim toga, tada se red (3) može formalno diferencirati po x:

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k\pi}{\ell}\left(-a_k \sin\frac{k\pi}{\ell}x + b_k \cos\frac{k\pi}{\ell}x\right). \tag{4}$$

Napišimo majorantni red reda (4):

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k\pi}{\ell}\left(|a_k| + |b_k|\right). \tag{5}$$

Ako red (5) konvergira, tada red (4) ravnomjerno konvergira. Saglasno svojstvima ravnomjerno konvergentnih redova suma reda (4) je izvod sume reda (3). Dakle, ako red

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^s\left(|a_k| + |b_k|\right),$$

konvergira za neki prirodan broj s, tada red (3) ravnomjerno konvergira i može se diferencirati po x.

Pretpostavimo da se periodična funkcija $f(x)$ sa periodom 2ℓ može razložiti u trigonimetrijski red, tj. da je

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi}{\ell}x + b_k \sin\frac{k\pi}{\ell}x\right), \tag{6}$$

za svako x (ili možda za sve x izuzev nekih određenih vrijednosti x). Nešto kasnije ćemo navesti uslove pod kojima razlaganje (6) važi (Dirihleovi uslovi). Postavlja se pitanje kako pomoću funkcije $f(x)$ definisati koeficijente a_k i b_k. U principu ovaj problem matematičari su riješili početkom XIX vijeka. Suštinski doprinos tome je dao Ž. Furije (1768-1830, francuski matematičar). On je dokazao da se koeficijenti a_k i

b_k trigonometrijskog reda koji predstavlja periodičnu funkciju $f(x)$ perioda 2ℓ izračunavaju po formulama:

$$\left.\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{k\pi x}{\ell}dx,\ k=0,\ 1,\ 2,\ 3....\\ b_k &= \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx,\ \ k=1,\ 2,\ 3....\end{aligned}\right\}. \tag{7}$$

Brojeve a_k i b_k (koji se računaju po formulama (7)), nazivamo Furijeovim koeficijentima funkcije $f(x)$. Trigonometrijski red (6), u kojem su a_k i b_k Furijeovi koeficijenti, nazivamo Furijeov red funkcije $f(x)$.

Specijalno, ako je funkcija $f(x)$ parna, tada je

$$\left.\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\ell}\int_{0}^{\ell} f(x)\cos\frac{k\pi x}{\ell}dx,\ k=0,\ 1,\ 2,\ 3....\\ b_k &= 0, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad k=1,\ 2,\ 3...\end{aligned}\right\},$$

a ako je funkcija $f(x)$ neparna, tada je

$$\left.\begin{aligned} a_k &= 0, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad k=0,\ 1,\ 2,\ 3....\\ b_k &= \frac{2}{\ell}\int_{0}^{\ell} f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx,\ k=1,\ 2,\ 3....\end{aligned}\right\}.$$

Ako je $\ell=\pi$, tj. ako je funkcija $f(x)$ periodična sa periodom 2π, tada Furijeov red (6) ima oblik

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right)$$

u kojem se Furijeovi koeficijenti (7) računaju po formulama:

$$\left.\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx,\ k=0,\ 1,\ 2,\ 3....\\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx,\ \ k=1,\ 2,\ 3....\end{aligned}\right\}.$$

Furijeovi koeficijenti (7) mogu se zapisati i na drugi način koji se oslanja na sljedeće tvrđenje. Ako je funkcija $f(x)$ periodična sa periodom 2ℓ, tada je $\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx=\int_{a}^{a+2\ell} f(x)dx$, gdje je a proizvoljni realni broj. Dokaz ovoga svojstva je vrlo prost. Neka je $I=\int_{a}^{a+2\ell} f(x)dx$. Saglasno svojstvima određenog integrala imamo da je

$I=\int\limits_{a}^{-\ell}f(x)dx+\int\limits_{-\ell}^{\ell}f(x)dx+\int\limits_{\ell}^{a+2\ell}f(x)dx$. Uvedimo smjenu $u=x-2\ell$. Kako je $f(x-2\ell)=f(u)$ (jer je 2ℓ period funkcije $f(x)$), to je $\int\limits_{\ell}^{a+2\ell}f(x)dx=\int\limits_{-\ell}^{a}f(u+2\ell)du=\int\limits_{-\ell}^{a}f(u)du-\int\limits_{a}^{-\ell}f(x)dx$. Dalje je

$$I=\int\limits_{a}^{-\ell}f(x)dx+\int\limits_{-\ell}^{\ell}f(x)dx-\int\limits_{a}^{-\ell}f(x)dx=\int\limits_{-\ell}^{\ell}f(x)dx,$$

što je i trebalo dokazati.

Iz prethodnog slijedi da se Furijeovi koeficijenti (7) mogu zapisati na sljedeći način:

$$\left.\begin{aligned}a_k&=\frac{1}{\ell}\int\limits_{a}^{a+2\ell}f(x)\cos\frac{k\pi x}{\ell}dx,\ k=0,\ 1,\ 2,\ 3....\\ b_k&=\frac{1}{\ell}\int\limits_{a}^{a+2\ell}f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx,\ \ k=1,\ 2,\ 3....\end{aligned}\right\}.$$

Vratimo se formulama (7). Kako se do njih dolazi?

Ako važi razlaganje (6), tada se red na desnoj strani u (6) može integraliti po x. Ako to uradimo na odsječku $[-\ell,\ell]$ sa lijevom i desnim stranom u (6), dobijamo

$$\int\limits_{-\ell}^{\ell}f(x)dx=\frac{a_0}{2}\int\limits_{-\ell}^{\ell}dx+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k\int\limits_{-\ell}^{\ell}\cos\frac{k\pi}{\ell}xdx+b_k\int\limits_{-\ell}^{\ell}\sin\frac{k\pi}{\ell}xdx\right). \qquad (8)$$

Kako je $\int\limits_{-\ell}^{\ell}\cos\frac{k\pi}{\ell}xdx=0,\quad \int\limits_{-\ell}^{\ell}\sin\frac{k\pi}{\ell}xdx=0$, to iz (8) slijedi da je

$$a_0=\frac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell}f(x)dx.$$

Sada pomnožimo lijevu i desnu stranu u (6) sa $\cos\frac{k\pi x}{\ell}$, $(k=1,\ 2,\ 3...)$, a zatim dobijene izraze integralimo na odsječku $[-\ell,\ell]$. Dobijamo

$$\int\limits_{-\ell}^{\ell}f(x)\cos\frac{k\pi x}{\ell}dx=\frac{a_0}{2}\int\limits_{-\ell}^{\ell}\cos\frac{k\pi x}{\ell}dx+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k\int\limits_{-\ell}^{\ell}\cos^2\frac{k\pi x}{\ell}dx+b_k\int\limits_{-\ell}^{\ell}\sin\frac{k\pi x}{\ell}\cos\frac{k\pi x}{\ell}dx\right) \quad (9)$$

Kako je $\int\limits_{-\ell}^{\ell}\cos^2\frac{k\pi x}{\ell}dx=\ell$ i $\int\limits_{-\ell}^{\ell}\sin\frac{k\pi x}{\ell}\cos\frac{k\pi x}{\ell}dx=0$, to iz (9) slijedi

$$a_k=\frac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell}f(x)\cos\frac{k\pi x}{\ell}dx \qquad (k=1,\ 2,\ 3...).$$

Poslije množenja lijeve i desne strane u (6) sa $\sin\frac{k\pi x}{\ell}$, $(k=1,\ 2,\ 3...)$ i integraljenja na odsječku $[-\ell,\ell]$ dobijamo da je

$$\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\ell}^{\ell}\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k\int_{-\ell}^{\ell}\cos\frac{k\pi x}{\ell}\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx+b_k\int_{-\ell}^{\ell}\sin^2\frac{k\pi x}{\ell}dx\right) \quad (10)$$

Kako je $\int_{-\ell}^{\ell}\sin^2\frac{k\pi x}{\ell}dx=\ell$, to iz (10) dobijamo da je

$$b_k=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx \ (k=1,\ 2,\ 3...).$$

Postoji više uslova pod kojima Furijeov red funkcije $f(x)$ konvergira ka funkciji $f(x)$. Ovdje navodimo dva, jedan o "običnoj", a drugi o ravnomjernoj konvergenciji. Prije nego to uradimo uvedimo pojam dio po dio glatke funkcije na odsječku $[a,b]$.

Funkciju $f(x)$ nazivamo dio po dio neprekidnom na odsječku $[a,b]$ ako se odsječak $[a,b]$ može razbiti na konačan broj intervala (x_{i-1},x_i), $i=1,2,...,N$, $x_0=a$, $x_N=b$, na kojima je funkcija $f(x)$ neprekidna, a u tačkama x_0, x_1, x_2, ..., x_{N-1}, x_N postoje konačni:

$$\lim_{x\to a+0} f(x),\ \lim_{x\to x_i-0} f(x),\ \lim_{x\to x_i+0} f(x),\ \lim_{x\to b-0} f(x).$$

Funkciju $f(x)$ nazivamo dio po dio glatka na odsječku $[a,b]$, ako je dio po dio neprekidna na $[a,b]$ i ako na svakom intervalu neprekidnosti ima dio po dio neprekidan izvod.

Uočimo da je dio po dio neprekidna funkcija na odsječku $[a,b]$ ograničena i da ima samo prekide prve vrste.

Teorema 1. Neka je periodična funkcija $f(x)$ sa periodom 2ℓ dio po dio glatka na proizvoljnom intervalu dužine 2ℓ. Tada Furijeov red funkcije $f(x)$ konvergira ka funkciji $f(x)$ u tačkama neprekidnosti funkcije $f(x)$, i ka $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ u tačkama prekida funkcije $f(x)$.

Kako je u tačkama neprekidnosti funkcije $f(x)$: $f(x+0)=f(x-0)=f(x)$, to suma Furijeovog reda u tački x ima opštu formulu $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

Teorema 2. Neka je periodična funkcija $f(x)$ sa periodom 2ℓ neprekidna na skupu R i dio po dio glatka na odsječku $[-\ell,\ell]$. Tada Furijeov red funkcije $f(x)$ ravnomjerno konvergira ka funkciji $f(x)$ na R.

Primjer 1. Razložiti u Furijeov red periodičnu funkciju $f(x)$ sa periodom 2ℓ, zadatu na $(-\ell,\ell)$ jednačinom $f(x)=\begin{cases}0, & -\ell<x<0\\ 1, & 0<x<\ell\end{cases}$.

Nađimo Furijeove koeficijente funkcije $f(x)$:

$$a_0=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)dx=\frac{1}{\ell}\int_0^{\ell}dx=1,$$

$$a_k=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cos\frac{k\pi x}{\ell}dx=\frac{1}{\ell}\int_0^{\ell}\cos\frac{k\pi x}{\ell}dx=0,\ (k=1,\ 2,\ 3...).$$

$$b_k=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx=\frac{1}{\ell}\int_0^{\ell}\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx=-\frac{1}{k\pi}\left[(-1)^k-1\right]=\begin{cases}0, & k\ parno\\ \dfrac{2}{k\pi}, & k\ neparno\end{cases}$$

, $(k=1,\ 2,\ 3...)$. Sliedi,

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{\ell}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{\ell}+\frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{\ell}+....\right)$$

u tačkama neprekidnosti funkcije $f(x)$. U tačkama prekida funkcije $f(x)$, a to su: $x=0,\ \pm\ell,\ \pm 2\ell,\ ....$, suma pripadajućeg Furijeovog reda funkcije $f(x)$ jednaka je

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{1}{2}.$$

Primjer 2. Razložiti u Furijeov red periodičnu funkciju $f(x)$ sa periodom 2π, zadatu na $(-\pi,\pi]$ jednačinom $f(x)=x$.

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos kx dx=0 \qquad (k=0,1,\ 2,\ 3...),$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin kx dx=\frac{2(-1)^{k+1}}{k}\ (k=1,\ 2,\ 3...).$$

Slijedi,

$$f(x)=2\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-....\right)$$

u tačkama neprekidnosti funkcije $f(x)$. U tačkama prekida funkcije suma pripadajućeg Furijeovog reda jednaka je 0.

Primjer 3. Razložiti u Furijeov red periodičnu funkciju $f(x)$ sa periodom 2π, zadatu na $[-\pi,\pi]$ jednačinom $f(x)=x^2$.

Data funkcija je parna u skupu R, pa je $b_k=0\,(k=1,\ 2,\ 3...)$. Dalje je

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos kx dx=\begin{cases}\dfrac{4}{k^2}, & k\ \textit{parno}\\ -\dfrac{4}{k^2}, & k\ \textit{neparno}\end{cases}\quad (k=1,\ 2,\ 3...).$$ Slijedi,

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}-4\left(\frac{\cos x}{1^2}-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-......\right),\ x\in R.$$

Specijalno, za $x=\pi$ imamo da je $\dfrac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}$.

Primjer 4. Razložiti u Furijeov red periodičnu funkciju $f(x)$ sa periodom 2π, zadatu na jednačinom $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0\\ x, & 0<x<\pi\end{cases}$.

Ovdje je $a_0=\dfrac{\pi}{2}$, $a_k=\begin{cases}0, & k\ \textit{parno}\\ -\dfrac{2}{\pi k^2}, & k\ \textit{neparno}\end{cases}$, $b_k=\begin{cases}-\dfrac{1}{k}, & k\ \textit{parno}\\ \dfrac{1}{k}, & k\ \textit{neparno}\end{cases}$, $(k=1,\ 2,\ 3...)$.

Slijedi,

$$f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+......\right)+\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-......\right)$$

u tačkama neprekidnosti funkcije $f(x)$. U tačkama prekida funkcije $f(x)$ suma Furijeovog reda je $\dfrac{x}{2}$. Specijalno, za $x=\pi$ imamo da je $\dfrac{\pi^2}{8}=\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$.

Na kraju razmotrimo Furijeove redove za neperiodične funkcije. Neka je funkcija $f(x)$ zadata na intervalu (a,b). Da bismo funkciju $f(x)$ mogli razložiti u Furijeov red potrebno je periodično produžiti (dodefinisati) lijevo i desno od inervala (a,b). Ovo produženje se može uraditi na različite načine. Na primjer:

a) Smatrajmo da je funkcija $f(x)$ periodična sa periodom $T=b-a$, tj. da je $f(x+(b-a))=f(x)$.

b) Funkciju $f(x)$ produžimo na R do neparne funkcije $F_1(x)$ sa periodom $T=2(b-a)$, tj.

$$F_1(x)=\begin{cases} f(x+a), & 0<x<b-a \\ -F_1(-x), & -(b-a)<x<0 \end{cases}, \; F_1(x+2(b-a))=F_1(x).$$

c) Funkciju $f(x)$ produžimo na R do parne funkcije $F_2(x)$ sa periodom $T=2(b-a)$, tj.

$$F_2(x)=\begin{cases} f(x+a), & 0<x<b-a \\ F_2(-x), & -(b-a)<x<0 \end{cases}, \; F_2(x+2(b-a))=F_2(x).$$

Furijeovi redovi u slučajevima a), b) i c) se razlikuju, ali u intervalu (a,b) (slučaj a)) i u intervalu $(0,b-a)$ (slučajevi b) i c)) konvergiraju funkciji $f(x)$ (pod odgovarajućim uslovima glatkosti).

Ako se želi poslije produženja dobiti samo Furijeov red po sinusima, tada funkciju $f(x)$ treba produžiti do neparne funkcije $F_1(x)$. U ovome slučaju je

$$a_n=a_n(F_1)=0, \; (k=0,\ 1,\ 2,\ 3\ldots),$$

$$b_k=b_k(F_1)=\frac{2}{b-a}\int_0^{b-a} F_1(x)\sin\frac{k\pi x}{b-a}dx, \; (k=1,\ 2,\ 3\ldots), \text{ i}$$

$$F_1(x)\sim\sum_{n=1}^{+\infty} b_n(F_1)\sin\frac{k\pi x}{b-a}.$$

U slučaju da želimo dobiti Furijeov red po kosinusima, tada funkciju $f(x)$ treba produžiti do parne funkcije $F_2(x)$. Sada je:

$$b_n=b_n(F_2)=0, \; (k=1,\ 2,\ 3\ldots),$$

$$a_k=a_k(F_2)=\frac{2}{b-a}\int_0^{b-a} F_2(x)\cos\frac{k\pi x}{b-a}dx, \; (k=0,\ 1,\ 2,\ 3\ldots), \text{ i}$$

$$F_2(x)\sim\frac{a_0(F_1)}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(F_2)\cos\frac{k\pi x}{b-a}.$$

Primjer 5. Funkciju $f(x)=x,\ 0<x<\pi$ razložiti u red po:

a) sinusima, b) kosinusima.

a) Funkciju $f(x)$ treba produžiti do neparne funkcije na intervalu $(-\pi,\pi)$, a zatim dobijenu funkciju smatrati periodičnom sa periodom 2π. Dalje je $a_k=0$, $(k=0,\ 1,\ 2,\ 3\ldots)$, $b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin kx dx=\begin{cases} -\frac{2}{k}, & k \text{ parno} \\ \frac{2}{k}, & k \text{ neparno} \end{cases}$, $(k=1,\ 2,\ 3\ldots)$. Slijedi,

$$x=2\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}+\ldots\right),\; x\in(0,\pi).$$

b) U ovome slučaju funkciju $f(x)$ treba produžiti do parne funkcije na intervalu $(-\pi,\pi)$. Dalje je $b_k=0$, $(k=1,\ 2,\ 3...)$ i $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x dx=\pi$,

$$a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos kx dx=\begin{cases} 0, & k \text{ parno} \\ \frac{-4}{\pi k^2}, & k \text{ neparno}\end{cases}$$ $(k=1,\ 2,\ 3...)$. Slijedi,

$$x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 4x}{4^2}+....\right),\ x\in(0,\pi).$$